هندسه ۲ مهندسی عمران ۲ برگزاری امتحان پایان ترم ۱۴۰۱ ۲ دانشکده فنی دانشگاه بوعلی

هندسه ۲ مهندسی عمران ۲ فشرده ۲ استاد رضا مهرگان ۲ سه شنبه ۱۴ خرداد ۱۴۰۱ ۲ سالن آمفی ۲ ساعت ۸:۳۰ تا ۱۱:۳۰

۱) در شکل زیر، خط‌چین Γ یک منحنی هموار است که از $A(0,0)$ تا $B(4,2)$ می‌گذرد. بردار میدان $\mathbf{F}(x,y)=(y^2,\,x+y)$ روی Γ مماس است. اگر Γ را با پاره‌خط $\overline{BA}$ ببندیم، کار $\mathbf{F}$ روی مسیر بسته حاصل را بیابید. جهت Γ از A به B است.

۲) میدان برداری $\mathbf{F}(x,y)=(3x^2y-y^3,\,x^3-3xy^2)$ را در نظر بگیرید. Γ همان مسیر بخش ۱ است. Γ را با پاره‌خط $\overline{BA}$ ببندید و کار $\mathbf{F}$ روی مسیر بسته جدید را محاسبه کنید. آیا $\mathbf{F}$ پایستار است؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

۳) تابع $f(x,y)=x^3-3xy$ را در نظر بگیرید. Γ را با پاره‌خط $\overline{BA}$ ببندید و کار $\mathbf{F}$ روی مسیر بسته جدید را با استفاده از قضیه گرین محاسبه کنید. $\mathbf{F}$ را برحسب f بنویسید و نتیجه را با پاسخ بخش ۲ مقایسه کنید.

۴) سطح S با معادله پارامتری $\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v,\,u\sin v,\,v)$ برای $0\le u\le 1$ و $0\le v\le \pi$ داده شده است. مساحت S را محاسبه کنید و نشان دهید S یک رویه جهت‌دار است. بردار یکه قائم $\mathbf{n}$ را برحسب u و v بنویسید.

۵) شار میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ از نیمه‌کره $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ را به سمت بالا محاسبه کنید. از قضیه واگرایی استفاده کنید و سپس همان شار را مستقیماً از رویه محاسبه کنید تا درستی پاسخ را بسنجید.

۶) دمای صفحه D با $T(x,y)=e^{x}\cos y+y^2$ داده شده است. D دایره $x^2+y^2\le 4$ است. گرادیان T را در نقطه $P(1,1)$ بیابید و بیشینه نرخ تغییر دما در P را محاسبه کنید. بردار یکه جهت بیشینه را بنویسید.

۷) $\mathbf{F}(x,y)=(2xy+\sin x,\,x^2+e^{y})$ را در نظر بگیرید. Γ مرز مثلث ABC با $A(0,0)$، $B(3,0)$، $C(0,3)$ است. کار $\mathbf{F}$ روی Γ را مستقیماً محاسبه کنید. سپس همان کار را با استفاده از قضیه گرین محاسبه کنید و نتیجه را مقایسه کنید.

۸) $\mathbf{F}(x,y,z)=(yz,\,xz,\,xy)$ را در نظر بگیرید. Γ دایره $x^2+y^2=1$ در صفحه $z=2$ است. Γ را با قرص $x^2+y^2\le 1$ در صفحه $z=0$ ببندید و شار $\mathbf{F}$ را از رویه بسته حاصل محاسبه کنید. $\mathbf{F}$ را برحسب $\mathbf{r}$ بنویسید و $\operatorname{div}\mathbf{F}$ را محاسبه کنید.

۹) $\mathbf{F}(x,y)=(e^{x}\sin y,\,e^{x}\cos y)$ را در نظر بگیرید. Γ مرز مستطیل $0\le x\le \pi$، $0\le y\le 1$ است. کار $\mathbf{F}$ روی Γ را مستقیماً محاسبه کنید. سپس همان کار را با استفاده از قضیه گرین محاسبه کنید و نتیجه را مقایسه کنید.

۱۰) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2,\,y^2,\,z^2)$ را در نظر بگیرید. Γ دایره $x^2+y^2=4$ در صفحه $z=3$ است. Γ را با قرص $x^2+y^2\le 4$ در صفحه $z=0$ ببندید و شار $\mathbf{F}$ را از رویه بسته حاصل محاسبه کنید. $\mathbf{F}$ را برحسب $\mathbf{r}$ بنویسید و $\operatorname{div}\mathbf{F}$ را محاسبه کنید.

(صفحه اینجا در انتهاست)

ناظر فدایی ۱۴۰۱/۰۲/۰۹ ۱۰:۴۰ ۲۰ پاسخ

در بخش ۳ سوال ۹ مخرج کسر $\sin y$ است نه $\cos y$ و در بخش ۴ قضیه گرین روی Γ بسته است پس انتگرال دوگانه $\iint_D (\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y)\,dA$ با $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ برابر است. اگر Γ باز بود باید Γ را ببندیم و اصلاح کنیم.

نیما کوشا ۱۴۰۱/۰۲/۱۰ ۹:۱۵ ۱ پاسخ

در بخش ۶ $\nabla T(1,1)=(e,e+2)$ است و بیشینه نرخ تغییر $\|\nabla T\|=\sqrt{e^2+(e+2)^2}$ است. بردار یکه جهت $(e,e+2)/\|\nabla T\|$ است. در بخش ۷ اگر Γ مثلث ABC باشد $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_D (2x-2y)\,dA$ با D مثلث است. در بخش ۸ $\operatorname{div}\mathbf{F}=y+x+y$ است.

هندسه ۲ مهندسی عمران ۲ برگزاری امتحان پایان ترم ۱۴۰۱ ۲ دانشکده فنی دانشگاه بوعلی

هندسه ۲ مهندسی عمران ۲ فشرده ۲ استاد رضا مهرگان ۲ سه‌شنبه ۱۴ خرداد ۱۴۰۱ ۲ سالن آمفی ۲ ساعت ۸:۳۰ تا ۱۱:۳۰

۱) در شکل زیر، خط‌چین Γ یک منحنی هموار است که از $A(0,0)$ تا $B(4,2)$ می‌گذرد. بردار میدان $\mathbf{F}(x,y)=(y^2,\,x+y)$ روی Γ مماس است. اگر Γ را با پاره‌خط $\overline{BA}$ ببندیم، کار $\mathbf{F}$ روی مسیر بسته حاصل را بیابید. جهت Γ از A به B است.

۲) میدان برداری $\mathbf{F}(x,y)=(3x^2y-y^3,\,x^3-3xy^2)$ را در نظر بگیرید. Γ همان مسیر بخش ۱ است. Γ را با پاره‌خط $\overline{BA}$ ببندید و کار $\mathbf{F}$ روی مسیر بسته جدید را محاسبه کنید. آیا $\mathbf{F}$ پایستار است؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

۳) تابع $f(x,y)=x^3-3xy$ را در نظر بگیرید. Γ را با پاره‌خط $\overline{BA}$ ببندید و کار $\mathbf{F}$ روی مسیر بسته جدید را با استفاده از قضیه گرین محاسبه کنید. $\mathbf{F}$ را برحسب f بنویسید و نتیجه را با پاسخ بخش ۲ مقایسه کنید.

۴) سطح S با معادله پارامتری $\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v,\,u\sin v,\,v)$ برای $0\le u\le 1$ و $0\le v\le \pi$ داده شده است. مساحت S را محاسبه کنید و نشان دهید S یک رویه جهت‌دار است. بردار یکه قائم $\mathbf{n}$ را برحسب u و v بنویسید.

۵) شار میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ از نیمه‌کره $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ را به سمت بالا محاسبه کنید. از قضیه واگرایی استفاده کنید و سپس همان شار را مستقیماً از رویه محاسبه کنید تا درستی پاسخ را بسنجید.

۶) دمای صفحه D با $T(x,y)=e^{x}\cos y+y^2$ داده شده است. D دایره $x^2+y^2\le 4$ است. گرادیان T را در نقطه $P(1,1)$ بیابید و بیشینه نرخ تغییر دما در P را محاسبه کنید. بردار یکه جهت بیشینه را بنویسید.

۷) $\mathbf{F}(x,y)=(2xy+\sin x,\,x^2+e^{y})$ را در نظر بگیرید. Γ مرز مثلث ABC با $A(0,0)$، $B(3,0)$، $C(0,3)$ است. کار $\mathbf{F}$ روی Γ را مستقیماً محاسبه کنید. سپس همان کار را با استفاده از قضیه گرین محاسبه کنید و نتیجه را مقایسه کنید.

۸) $\mathbf{F}(x,y,z)=(yz,\,xz,\,xy)$ را در نظر بگیرید. Γ دایره $x^2+y^2=1$ در صفحه $z=2$ است. Γ را با قرص $x^2+y^2\le 1$ در صفحه $z=0$ ببندید و شار $\mathbf{F}$ را از رویه بسته حاصل محاسبه کنید. $\mathbf{F}$ را برحسب $\mathbf{r}$ بنویسید و $\operatorname{div}\mathbf{F}$ را محاسبه کنید.

۹) $\mathbf{F}(x,y)=(e^{x}\sin y,\,e^{x}\cos y)$ را در نظر بگیرید. Γ مرز مستطیل $0\le x\le \pi$، $0\le y\le 1$ است. کار $\mathbf{F}$ روی Γ را مستقیماً محاسبه کنید. سپس همان کار را با استفاده از قضیه گرین محاسبه کنید و نتیجه را مقایسه کنید.

۱۰) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2,\,y^2,\,z^2)$ را در نظر بگیرید. Γ دایره $x^2+y^2=4$ در صفحه $z=3$ است. Γ را با قرص $x^2+y^2\le 4$ در صفحه $z=0$ ببندید و شار $\mathbf{F}$ را از رویه بسته حاصل محاسبه کنید. $\mathbf{F}$ را برحسب $\mathbf{r}$ بنویسید و $\operatorname{div}\mathbf{F}$ را محاسبه کنید.

(صفحه اینجا در انتهاست)

ناظر فدایی