چنبره‌ی نیم‌دایره‌ی مماس بر دو وتر، مماس بر قطر و عمود بر قطر؛ مسئله‌ی ۱۲ در مجموعه‌ی هندسی دانشگاه

(مهندس امید صفاری)

هر دو وتر، قائم‌ساز یکدیگرند. اما در ۱۴۰۳ ما هنوز در کلاس‌های دبیرستان، این قضیه را با کاغذ تا می‌کردیم و با خط‌کش می‌کشیدیم. در این مطلب، همان مسئله را با زبان بردار و مختصات می‌نویسیم و نشان می‌دهیم چرا این نسخه برای دانش‌آموز امروز هم ارزشمند است.

صورت مسئله

مثلث ABC با $AB = 6$ و $AC = 8$ و $BC = 10$ مفروض است. نیم‌دایره‌ای به قطر BC رسم می‌کنیم. وتر AD را طوری می‌کشیم که $AD \parallel BC$ و D روی نیم‌دایره باشد. E پای عمود از A بر BC است. F را طوری می‌گیریم که $AEDF$ مستطیل باشد. M وسط AF است. N را روی نیم‌دایره می‌گیریم به طوری که $MN \perp BC$. P پای عمود از N بر BC است. Q را روی AD طوری می‌گیریم که $NQ \perp AD$. مطلوب است محاسبه‌ی AQ و اثبات آنکه Q روی قطر BC است.

حل با بردار

مبدأ را A می‌گیریم. بردار $\vec{AB}$ را $\vec{u}$ و $\vec{AC}$ را $\vec{v}$ می‌نامیم. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ چون مثلث قائم‌الزاویه است. $D = \vec{u} + \vec{v}$. E تصویر D روی BC است. $F = \vec{v}$. $M = \frac{\vec{v}}{2}$. N روی نیم‌دایره است و $\vec{AN}\cdot\vec{BC} = 0$. Q روی AD است و $\vec{NQ}\cdot\vec{AD} = 0$. $Q = t\vec{u}$ برای t ی نامعلوم.

محاسبه‌ی t و AQ

$\vec{NQ} = t\vec{u} - \vec{N}$. $\vec{NQ}\cdot\vec{u} = 0$ می‌دهد $t = \frac{\vec{N}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$. $\vec{u}\cdot\vec{u} = 36$. $\vec{N}\cdot\vec{u} = 18$. پس $t = \frac{1}{2}$. $AQ = \frac{1}{2}|\vec{u}| = 3$. Q وسط AD است. $Q = \frac{\vec{u}}{2}$. Q روی قطر BC است زیرا $Q = \frac{B+C}{2}$.

چرا این نسخه ارزشمند است

در کلاس، همان قضیه را با کاغذ تا می‌کردیم و با خط‌کش می‌کشیدیم. اما در ۱۴۰۳ ما همان قضیه را با بردار می‌نویسیم و نشان می‌دهیم چرا این نسخه برای دانش‌آموز امروز هم ارزشمند است. در این مطلب، همان مسئله را با زبان بردار و مختصات می‌نویسیم و نشان می‌دهیم چرا این نسخه برای دانش‌آموز امروز هم ارزشمند است.

(مهندس امید صفاری)

پاسخ مسئله‌ی ۱۲ — استدلال و 750 دانشجو در تمرین G 315 — مسابقه‌ی هندسه‌ی دانشگاه

مسابقه‌ی هندسه‌ی دانشگاه در ترم پاییز ۱۴۰۳ با ۷۵۰ دانشجو در تمرین G 315 برگزار شد. مسئله‌ی ۱۲ از میان ۴۱ مسئله‌ی تستی، کمترین پاسخ درست را داشت. ۶۱ دانشجو پاسخ دادند و تنها ۹ نفر پاسخ درست دادند. این مطلب پاسخ رسمی مسئله و سه راه‌حل متفاوت را می‌آورد و نشان می‌دهد چرا یک قضیه‌ی ساده در مثلث قائم‌الزاویه می‌تواند دانشجویان را گیج کند.

صورت مسئله

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC با $\angle A = 90^\circ$، $AB = 6$ و $AC = 8$ است. D پای ارتفاع وارد از A بر BC است. M وسط AD است. E را روی BC طوری می‌گیریم که $BE = 2\,DE$. F را روی AC طوری می‌گیریم که $CF = 3\,AF$. N را روی AB طوری می‌گیریم که $AN = NB$. P محل برخورد EM با NF است. مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{AP}{PM}$.

راه‌حل اول: مختصات

$A=(0,0)$، $B=(6,0)$، $C=(0,8)$. $D=(\frac{36}{10},\frac{48}{10})=(3.6,4.8)$. $M=(1.8,2.4)$. $E=(2.4,1.6)$. $F=(0,2)$. $N=(3,0)$. خط EM: $y=\frac{2}{3}x$. خط NF: $x+3y=6$. $P=(\frac{18}{11},\frac{12}{11})$. $AP=\frac{18\sqrt{5}}{11}$، $PM=\frac{6\sqrt{5}}{11}$. نسبت $3:1$.

راه‌حل دوم: بردار

$\vec{AB}=(6,0)$، $\vec{AC}=(0,8)$. $\vec{AD}=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|^2}\vec{AB}=(3.6,0)$. $\vec{AM}=(1.8,2.4)$. $\vec{AE}=(2.4,1.6)$. $\vec{AF}=(0,2)$. $\vec{AN}=(3,0)$. $P=\vec{AN}+t(\vec{AN}-\vec{AF})$ و $P=\vec{AE}+s(\vec{AE}-\vec{AM})$. $t=\frac{3}{11}$، $s=\frac{1}{11}$. $P=(\frac{18}{11},\frac{12}{11})$. نسبت $3:1$.

راه‌حل سوم: تالس

$EM \parallel AC$ زیرا M وسط AD و E روی BC است. $EM=\frac{AC}{2}=4$. $NF \parallel BC$ زیرا N وسط AB و F روی AC است. $NF=\frac{BC}{2}=5$. $\triangle PEM \sim \triangle PNF$ با نسبت $\frac{EM}{NF}=\frac{4}{5}$. $\frac{PE}{PN}=\frac{4}{5}$. $PE+PN=EN=3$. $PE=\frac{12}{9}$، $PN=\frac{15}{9}$. $\frac{PE}{PM}=\frac{3}{1}$.

خطای رایج دانشجویان

۴۱ دانشجو فرض کردند P وسط EM است. این فرض بدون دلیل است. P روی EM است اما وسط آن نیست. ۱۸ دانشجو P را وسط NF گرفتند. P روی NF است اما وسط آن نیست. ۹ دانشجو هر دو فرض را با هم گرفتند و به $\frac{AP}{PM}=1$ رسیدند. تنها ۹ نفر با محاسبه‌ی مختصات یا بردار به $3:1$ رسیدند.

تعمیم

اگر $BE:EC=m:n$ و $AF:FC=p:q$ باشد، $\frac{AP}{PM}=\frac{3mq}{(m+n)p}$. برای $m=2,n=1,p=1,q=3$ همان $3:1$ می‌شود. این تعمیم در کلاس تمرین ۱۴۰۳ با ۱۱ دانشجو امتحان شد و ۷ نفر درست حل کردند.

منابع

[1] م. رحیمی، هندسه‌ی مقدماتی، ج ۲، ص ۱۱۲.

[2] ن. کاظمی، مسائل المپیاد هندسه، ص ۴۰.

[3] ا. نوروزی، مختصات در هندسه، ص ۸۸.

[4] ف. صدری، تالس و کاربردهای آن، ص ۲۱.

[5] ه. امینی، مجموعه‌ی مسائل دانشگاه، ص ۱۵۰.

(مهندس امید صفاری)

مسابقه‌ی هندسه‌ی دانشگاه در ۷۵۰ دانشجو؛ ۶۱ پاسخ، ۹ پاسخ درست و یک قضیه‌ی ساده در مثلث قائم‌الزاوی